

1. Problemas de Programação Linear

1.1

A Direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário metálico de escritório sugere o lançamento de dois novos produtos: um modelo de secretária e um modelo de estante, ambos em substituição de modelos actuais.

Esta direcção não prevê dificuldade de colocação dos produtos no mercado para as estantes, enquanto que aconselha que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

Após estudos levados a cabo pela Direcção de Produção, concluiu-se que:

- A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 horas-máquina.
- A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem.
- Cada secretária necessita de 2h-M de estampagem e 4h-H de montagem e acabamento.
- Cada estante necessita de 4h-M de estampagem e 4h-H de montagem e acabamento.

As margens brutas unitárias estimadas são de 40 Euros para as secretárias e 30 Euros para as estantes.

- 1.1.1 Formalize o problema de forma a se poder determinar o plano de produção mensal que maximize a margem bruta, para estes dois novos produtos.
- 1.1.2 Resolva o problema através do método gráfico.
- 1.1.3 Esboce a função de custo, identificando os extremos da mesma, bem como os respectivos valores.
- 1.1.4 Utilize o método do SIMPLEX numa folha de cálculo para resolver o problema.
- 1.1.5 Verifique as alíneas anteriores utilizando o Solver do MSExcel

1.2

O Sr. João, um grande criador de porcos alentejano, pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal, por forma a conseguir uma certa quantidade nutritiva a um custo mínimo.

O tipo de ração em granulado tem 20g/kg de hidratos de carbono, 50g/kg de vitaminas, 30g/kg de proteínas e custa 10€/kg.

O tipo de ração em farinha tem 50g/kg de hidratos de carbono, 10g/kg de vitaminas, 30g/kg de proteínas e custa 5€/kg.

As quantidades mínimas diárias requeridas por cada porco são de 200g de hidratos de carbono, 150g de vitaminas e 210g de proteínas.

Após várias tentativas frustradas de optimização, mas ciente da importância da questão para o seu negócio, o Sr. João contratou uma empresa de consultoria para lhe resolver o problema.

- 1.2.1 Como quadro da referida empresa, formalize o problema como um problema de programação linear.
- 1.2.2 Resolva o problema através do método gráfico.
- 1.2.3 Esboce a função de custo, identificando os extremos da mesma, bem como os respectivos valores.
- 1.2.4 Verifique as alíneas anteriores utilizando o Solver do MSExcel
- 1.2.5 Utilize o método do SIMPLEX numa folha de cálculo para resolver o problema.

1.3

Após uma quebra de vendas nos últimos anos, a VW Alemanha pretende reestruturar a produção dos seus modelos automóveis, no sentido de maximizar os lucros.

A Autoeuropa, fábrica com alguns dos melhores indicadores de performance e qualidade do grupo, foi a escolhida para a produção de dois modelos: o Phaeton, berlina topo de gama da VW, e o Touareg, um dos melhores SUV do mercado.



Phaeton

Touareg

Esta fábrica está organizada em três departamentos: carroçarias, motores, e montagem. Como até então era montado um só modelo (VW Sharan), foi necessário subdividir o departamento de montagem em dois, para poder responder à especificidade de cada um dos novos modelos.

O departamento de fabrico de carroçarias pode produzir 7500 carroçarias para Phaeton ou 10500 carroçarias para Touareg, por mês, ou uma combinação equivalente (por exemplo, 4500 carroçarias para Phaeton e 4200 carroçarias para Touareg, correspondente a 60% e 40% da capacidade de produção, respectivamente).

Analogamente, o departamento de fabrico de motores pode produzir 10000 motores para o Phaeton ou 5000 motores de Touareg, por mês, ou uma combinação equivalente.

Os departamentos de montagem têm capacidade para 6750 e 4500 viaturas por mês, Phaeton e Touareg respectivamente.

As margens brutas unitárias são de 1500€ para o Phaeton e de 2000€ para o Touareg. Não se prevendo quebras na procura de ambos os modelos, a Direcção da Autoeuropa pretende otimizar a produção maximizando o lucro.

- 1.3.1 Formalize o problema de programação linear.
- 1.3.2 Qual o número de Phaetons e de Touaregs que maximiza o lucro? Resolva o exercício pelo método gráfico
- 1.3.3 Utilize o método SIMPLEX numa folha de cálculo para verificar a alínea anterior.
- 1.3.4 Verifique as alíneas anteriores utilizando o Solver do MSExcel

1.4

A Quimex tem vindo a sofrer uma deterioração da sua imagem devido à poluição causada pela sua unidade fabril no rio que lhe fica próximo. A administração da empresa considera que chegou o momento de resolver o problema e encomendou um estudo que tem por objectivo determinar a possibilidade de compatibilizar a redução da emissão de resíduos poluentes, mantendo os objectivos económicos definidos para o corrente exercício.

Três tipos de fertilizantes são produzidos nesta unidade fabril. O fertilizante A emite 50 unidades de resíduos tóxicos por tonelada produzida, o fertilizante B 40 unidades por tonelada e o fertilizante C 60 unidades por tonelada.

Os preços de venda são de 20€/t, 25€/t e 30€/t para os fertilizantes A, B e C, respectivamente. Os custos por tonelada são de 10€/t para o fertilizante A e 20€/t para os fertilizantes B e C.

Para que se cumpra o plano estabelecido no início do ano, o lucro mínimo mensal deve ser de 100 mil euros.

A empresa tem uma capacidade instalada para produzir 15000 toneladas de fertilizante por mês, e não pretende trabalhar a menos de 80% da capacidade máxima. Não existem problemas de escoamento para qualquer um dos tipos de fertilizante. Compromissos assumidos anteriormente obrigam a QUIMEX a entregar a um cliente 5000 toneladas mensais de fertilizante A.

- 1.4.1 Formalize o problema em questão.
- 1.4.2 É possível usar o método gráfico para resolver o exercício? Em caso afirmativo indique o plano ótimo para a Quimex utilizando esse método.
- 1.4.3 Resolva o exercício utilizando o Solver do MSExcel

1.5

A empresa de produção de azeite Azeitex S.A. oferece quatro tipos de azeite ao cliente: azeite do tipo 1 (T1), azeite extra virgem com percentagem de ácido oleico inferior a 1%; azeite do tipo 2 (T2), virgem, com acidez de 1% a 2%; azeite do tipo 3 (T3), corrente, com acidez de 2% a 3.3%; e azeite do tipo 4 (T4), com acidez superior a 3.3%, utilizado em indústria de refinação, saboaria, farmácia e cosmética.

Três unidades são necessárias na produção de qualquer um dos tipos de azeite: prensagem, refinação e embalagem, sendo que as respectivas limitações mensais são de 650, 700 e 700 horas-máquina.

100 litros de azeite T1 necessita de 1h-m de prensagem, 2h-m de refinação e 1.5h-m de embalagem. O azeite T2 necessita de 1.5, 1.5, 1.25h-m respectivamente. O T3 de 0.75, 2.5, 1.25 respectivamente. E por fim, o T4 de 1.25, 1.5, 1.5h-m respectivamente.

Devido à utilização mais ou menos intensiva de cada uma das referidas unidades, cada tipo de azeite tem uma margem bruta diferente. Assim sendo, o azeite T1 tem uma margem de 40€ por cada 100litros, o T2 de 32€, o T3 de 35€ e o T4 de 36€.

A Azeitex tem conseguido destacar-se no mercado nacional pela qualidade dos seus produtos, bem como pelo preço concorrencial a que os oferece, por isso não é expectável nenhuma quebra na procura do seu azeite.

Formalize o problema por forma a maximizar o lucro.

- 1.5.1 É possível usar o método gráfico para resolver o exercício? Em caso afirmativo indique o plano de produção ótimo para a Azeitex utilizando esse método.
- 1.5.2 Resolva o exercício utilizando o Solver do MSExcel
- 1.5.3 Que quantidade de cada um dos azeites maximiza o lucro da empresa?
- 1.5.4 Considere agora que tem de produzir uma maior quantidade de azeite devido a uma encomenda de última hora. Este cliente necessita de pelo menos 10000 litros de azeite T3 e 5000 litros de azeite T4. Qual o novo plano de produção?
- 1.5.5 E se tivesse de produzir pelo menos 250000 litros de azeite T3 e T4, qual seria o novo plano de produção? Comente.

1.6

Uma empresa de electrónica fabrica quadros de circuitos integrados e projectos electrónicos especiais. As operações finais de montagem são executadas por um pequeno grupo de trabalhadores especializados que trabalham simultaneamente nos produtos.

Devido ao pouco espaço disponível na fábrica, não podem trabalhar em simultâneo mais de dez pessoas. O orçamento de despesas com pessoal prevê um máximo de 6000 Euros por mês para os salários dos trabalhadores.

A estrutura salarial na indústria impõe que os trabalhadores com dois ou mais anos de experiência recebam 1000€ por mês, enquanto que os outros recebam 800€.

Estudos prévios mostraram que os trabalhadores mais experientes produzem 2000€ de valor acrescentado por mês, enquanto que os outros acrescentam apenas 1800€.

- 1.6.1 A partir dos dados apresentados, formalize o problema de programação linear.
- 1.6.2 Visando a maximização do valor acrescentado por mês, quantas pessoas de cada grupo devem ser empregues? Utilize o método gráfico para resolver o problema. Esboce a função de custo.
- 1.6.3 Imagine que o orçamento com pessoal subiu para o dobro. Com ajuda do gráfico da alínea anterior, consegue dizer quais os trabalhadores que deveria empregar sem resolver o problema?

1.7

Uma empresa de fundição extrai chumbo e zinco a partir de dois tipos de sucata. O tipo A custa 60€/t e, em média, permite a extracção de 100kg de chumbo e 100kg de zinco por tonelada de sucata. A sucata de tipo B custa 100€/t e, em média, permite a extracção de 100kg de chumbo e 300kg de zinco, por tonelada de sucata.

- 1.7.1 Supondo que as vendas diárias são de pelo menos 3 toneladas de chumbo e 4 toneladas de zinco, formalize o problema.
- 1.7.2 Qual o esquema de aprovisionamento a adoptar?
- 1.7.3 Suponha agora que, por aperfeiçoamento do processo de extracção, é possível extrair o dobro da quantidade de chumbo a partir de cada tipo de sucata. Haverá vantagem em alterar o esquema de aprovisionamento?

1.8

Uma empresa produz dois tipos de cintos, A e B. Cada tipo de cinto A exige o dobro do tempo necessário à fabricação de um cinto do tipo B, e a empresa pode fabricar diariamente 1000 cintos do tipo B.

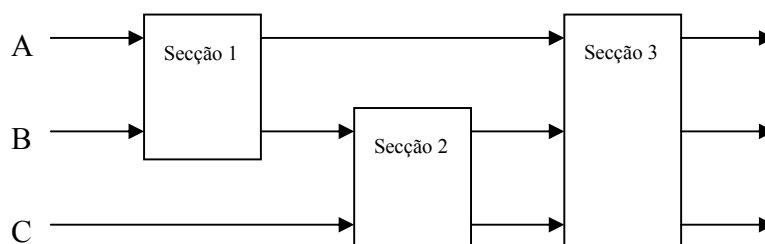
A quantidade de cabedal fornecido à empresa é apenas suficiente para fabricar diariamente 800 cintos.

O cinto do tipo A necessita de uma fivela de luxo e só se dispõe diariamente de 400 destas fivelas, enquanto que para o cinto do tipo B podem-se dispor de 700 fivelas.

- 1.8.1 Formalize o problema sabendo que as margens brutas unitárias dos cintos do tipo A e B são de 1.6€ e 1.7€, respectivamente.
- 1.8.2 Resolva graficamente o problema, esboçando o espaço de soluções e a função de custo.
- 1.8.3 Haverá alteração da solução ótima caso a margem bruta unitária dos cintos do tipo A passar a ser de 2€? Esboce a nova função de custo e verifique se a mesma está de acordo com o resultado obtido.

1.9

Uma linha de produção de uma fábrica de químicos é constituída por três secções e pode produzir três produtos de acordo com o diagrama abaixo.



As secções 1, 2 e 3 têm uma capacidade de tratamento diária de 100, 200 e 400 unidades, respectivamente. Cada produto, por tonelada produzida, utiliza uma unidade de capacidade de cada secção interveniente no processo de fabrico.

Sabe-se que não há dificuldade quanto à colocação no mercado dos produtos A e C, enquanto que para o produto B não se pode ultrapassar a quota de mercado fixada em 80 t/dia.

- 1.9.1 Sabendo que as margens brutas por tonelada produzida dos produtos A, B e C são de 3000, 4000 e 2000 €/t, respectivamente, estabeleça um modelo matemático de programação linear que lhe permita planear a produção diária.
- 1.9.2 Resolva graficamente o problema e indique o plano diário de produção ótimo
- 1.9.3 Resolva o problema com o método SIMPLEX numa folha de cálculo.
- 1.9.4 Utilize o solver numa folha de cálculo para verificar a solução obtida nas alíneas anteriores.

1.10

Uma companhia aérea está a considerar aumentar o número de vôos que oferece. Para esse efeito, tornou-se necessário considerar a hipótese de contratar mais funcionários para as mais diversas funções, como por exemplo para trabalharem no check-in, embora não seja claro quantos são necessários.

Uma equipa de investigação operacional está a estudar o problema, no sentido de minimizar o custo com o pessoal, garantindo uma qualidade de serviço imposta pela administração da empresa.

Com base nos vôos agendados, a equipa de IO obteve o número mínimo de funcionários que são necessários para cada período de tempo do dia, de acordo com a tabela abaixo.

Por imposição da legislação do trabalho, os turnos dos funcionários não podem ultrapassar as oito horas de trabalho diário. Após algum estudo, a equipa de IO resolveu que existiriam cinco turnos, de oito horas cada um. Os salários dos turnos variam por forma a cativar os funcionários para os turnos menos apetecíveis.

	Turnos					
Horas do dia	1	2	3	4	5	Funcionários
6-8	X					48
8-10	X	X				79
10-12	X	X				65
12-14	X	X	X			87
14-16		X	X			64
16-18			X	X		73
18-20			X	X		82
20-22				X		43
22-24				X	X	52
24-6					X	15
Salário diário (€)	170	160	175	180	195	

- 1.10.1 Formalize o problema como um problema de programação linear.
- 1.10.2 Apresente o sistema aumentado, com a introdução de variáveis necessárias à resolução do problema pelo método do simplex. Justifique.
- 1.10.3 Resolva o problema pelo método do simplex.
- 1.10.4 Confirme o resultado obtido através do solver.

1.11

Considere a seguinte formalização:

Maximizar: $Z = 40X_1 + 32X_2 + 35X_3 + 36X_4 + 37X_5$

Sujeito a: $2X_1 + 3X_2 + 1.5X_3 + 2.5X_4 + 2.25X_5 \leq 650$

$$4X_1 + 3X_2 + 5X_3 + X_4 + 4X_5 \leq 700$$

$$3X_1 + 2.5X_2 + 2.5X_3 + 2X_4 + 2.5X_5 \leq 700$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 2X_5 \leq 300$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4 + 4X_5 \leq 450$$

$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 3X_5 \leq 550$$

Com: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Resolva o problema aplicando o método do simplex.

1.12

Considere a seguinte formalização:

Maximizar: $Z = 4X_1 + 2X_2$

Sujeito a: $2X_1 + X_2 \leq 10$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 8$$

Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.12.1 Obtenha uma solução óptima do problema a partir do método do simplex.

1.12.2 A solução que encontrou na alínea anterior é única? De que forma é que o último quadro do simplex pode auxiliar a identificar esta questão?

1.12.3 Efectue mais uma iteração por forma a obter outra solução óptima.

1.12.4 Verifique os resultados anteriores pelo método gráfico.

1.12.5 Utilize o solver para efectuar uma análise de sensibilidade. Como pode identificar que o problema tem solução óptima múltipla?

1.13

As alíneas que se seguem pretendem exemplificar casos especiais do método do simplex. Resolva cada uma delas:

- pelo método do simplex, à mão
- pelo método do simplex, utilizando uma folha de cálculo
- pelo método gráfico
- através do solver

Identifique a particularidade de cada uma delas, verificando como cada método utilizado se comportou na resolução do problema.

1.13.1 Maximizar: $Z = 2X_1 + 5X_2$
Sujeito a: $-X_1 + X_2 \leq 2$
 $X_2 \leq 8$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.2 Maximizar: $Z = 4X_1 + 2X_2$
Sujeito a: $2X_1 + X_2 \leq 10$
 $X_1 \leq 4$
 $X_2 \leq 8$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.3 Maximizar: $Z = 5X_1 + 2X_2$
Sujeito a: $2X_1 + X_2 \leq 10$
 $X_1 \leq 4$
 $X_2 \leq 8$
 $X_1 + X_2 \geq 2$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.4 Maximizar: $Z = 2X_1 + 2X_2$
Sujeito a: $2X_1 + X_2 \leq 10$
 $X_1 \leq 4$
 $X_2 \leq 8$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.5 Minimizar: $Z = 5X_1 + 2X_2$
Sujeito a: $2X_1 + X_2 \leq 10$
 $X_1 \leq 4$
 $X_2 \leq 8$
 $X_1 + X_2 \geq 2$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.6 Maximizar: $Z = 5X_1 + 3X_2$
Sujeito a: $2X_1 + X_2 = 10$
 $X_2 \leq 8$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.7 Maximizar: $Z = 3X_1 + 5X_2$
Sujeito a: $2X_1 + 2X_2 \leq 10$
 $-X_1 + 2X_2 \leq 10$
 $X_1 \leq 4$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.8 Maximizar: $Z = 3X_1 + 4X_2$
Sujeito a: $X_1 + X_2 \leq 15$
 $X_1 - X_2 \geq 5$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.13.9 Maximizar: $Z = 2X_1 + 3X_2$
Sujeito a: $X_1 + X_2 \geq 15$
 $X_2 \leq 7.5$
 $X_1 \leq 5$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

1.14

Considere a formalização abaixo, referente a um problema de maximização do lucro de uma empresa.

Maximizar: $Z = 300X_1 + 350X_2$
Sujeito a: $X_1 + X_2 \leq 15$
 $X_2 \leq 7.5$
 $X_1 \leq 10$
Com: $X_1, X_2 \geq 0$

- 1.14.1 Resolva o problema pelo método gráfico, e pelo método do simplex numa folha de cálculo
- 1.14.2 Qual é a restrição que, a ser alterada, mais influencia o lucro. Justifique.
- 1.14.3 Efectue uma análise de sensibilidade aos parâmetros B_i e C_j .
- 1.14.4 Verifique os resultados através do solver.

Exercícios baseados e adaptados de:

Hill, M. M., & Santos, M. M. d. (2002). *Investigação operacional - exercícios de programação linear* (2 ed.). Lisboa: Sílabo.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2005). *Introduction to operations research* (8 ed.). Singapore: McGraw-Hill International Edition.

Magalhães, L. T. (1992). *Álgebra linear como introdução à matemática aplicada* (4 ed.). Lisboa: Texto Editora.

Ramalhete, M., Guerreiro, J., & Magalhães, A. (1985). *Programação linear* (Vol. I): McGraw Hill de Portugal, Lda.