3. Problemas de Optimização Não Linear e de Optimização em Redes

3.1

Considere a seguinte função de custo de um dado problema de optimização:

$$y = 2\,x^3 - 35\,x^2 + 100\,x + 2 \quad, \text{com } 0 \leq x \leq 15$$

3.1.1 Que métodos heurísticos podem ser utilizados para obter o seu máximo?

3.1.2 De entre os métodos da alínea anterior, qual o mais lógico de ser utilizado no presente caso?

3.1.3 Resolva o problema com um algoritmo genético. Codifique o problema de uma forma binária, utilize uma população de três indivíduos, reproduza os mesmos em dois pontos à escolha, e efectue mutações entre o primeiro e segundo bit.

3.2

Considere a seguinte função de um problema de optimização:

$$Z = 0.00111x^5 - 0.0439x^4 + 0.6014x^3 - 3.385x^2 + 7.5226x + 2$$
$$+ 0.00111y^5 - 0.0439y^4 + 0.6014y^3 - 3.385y^2 + 7.5226y + 2$$

3.2.1 Aplique o método Stochastic Hill-Climbing com cada um dos grupos de dados, no domínio $x \in [0\,,\,16]$ e $y \in [0\,,\,16]$.

Posição inicial (x,y)	Passo
(9,9)	1 unidade
(1,11)	1 unidade
(9,1)	1 unidade
(11,0)	4 unidades

3.2.2 Comente os resultados. Os resultados foram sempre idênticos? Atingiu sempre o máximo da função? Tem a garantia de ter atingido o máximo?

3.2.3 Utilize um gráfico de superfície do MSExcel para verificar os resultados obtidos.

3.3

Considere as funções abaixo indicadas. Utilize os métodos de Stochastic Hill-Climbing, Simulated Annealing, Algoritmos Genéticos e Tabu Search, por forma a tentar obter o máximo de cada função. Comente os resultados obtidos e obtenha o gráfico de superfície de cada uma das funções.

3.3.1 Z = 2x3 -35x2 +100x +2 $\quad x \in [0\ ,\ 15]$

3.3.2 $Z = \begin{cases} \dfrac{sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & se \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 1 \quad se \quad x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$ $\quad x \in [-5\ ,\ 5] \quad y \in [-5\ ,\ 5]$

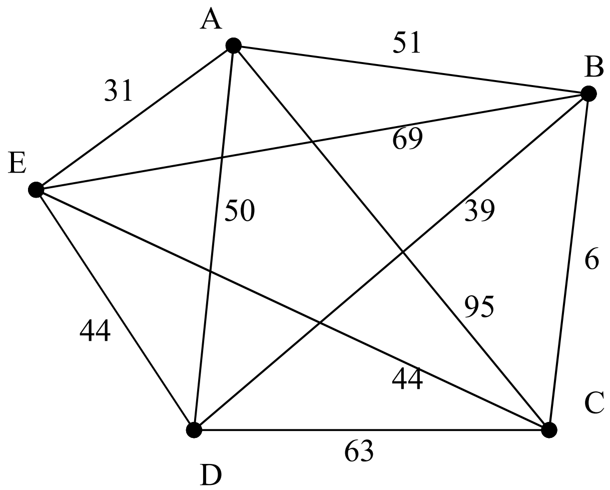
3.3.3 $Z = 3(1-x)^2 e^{-\left(x^2-(y+1)^2\right)} - 10\left(\dfrac{x}{5} - x^3 - y^5\right)e^{\left(-x^2-y^2\right)} - \dfrac{1}{3}e^{-(x+1)^2-y^2}$

$x \in [-3\ ,\ 3] \quad y \in [-3\ ,\ 3]$

3.3.4 $Z = -100\ (x^2 - 5y) + (1+x)^2$ $\quad x \in [-10\ ,\ 10] \quad y \in [-10\ ,\ 10]$

3.4

Na figura abaixo estão apresentadas as distâncias em km entre 5 cidades (A,B,C,D,E). Pretende-se que um delegado comercial de uma empresa visite os seus clientes em todas elas, e volte ao lugar de origem, percorrendo a mínima distância possível.



3.4.1 Identifique o problema em questão.

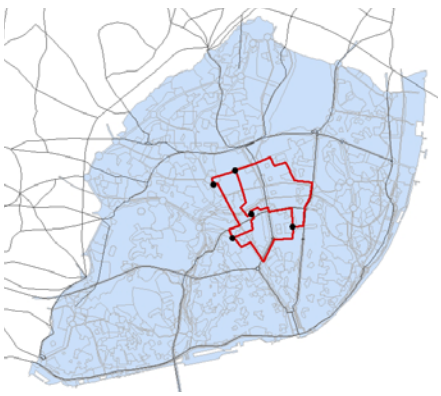
3.4.2 Que algoritmos podem ser utilizados para resolver o problema. Justifique.

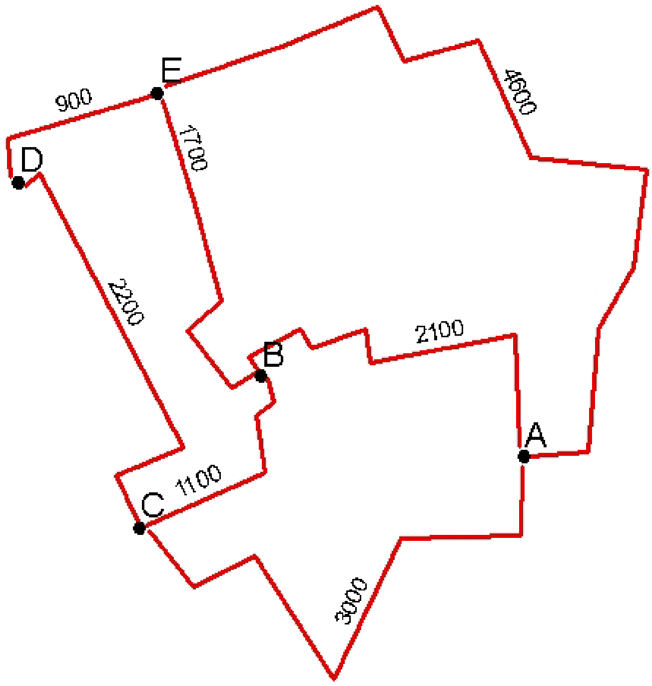
3.4.3 Resolva o problema com cada um dos métodos indicados na alínea anterior. Compare e comente os resultados obtidos.

3.5

Devido ao crescente fluxo de dados entre centros de investigação universitários, o governo decidiu, no âmbito do choque tecnológico, ligar todos os pólos de universidades da cidade de Lisboa com fibra óptica.

Após estudos preliminares ficou decidido que, numa primeira fase, os pólos a ligar seriam: A – IST, B – UNL (Av. Berna), C – UNL (Campolide), D – Universidade Católica e E – Cidade Universitária. Esses mesmos estudos identificaram os melhores percursos para a fibra óptica, os quais estão marcados a vermelho na figura. As dimensões dos percursos (em metros) foram também estimadas.





3.5.1 Numa primeira instância, pretende-se ligar todas as universidades com o mínimo de cabo possível. Que algoritmo deverá ser usado? Obtenha a solução do problema. A solução é óptima?

3.5.2 Caso lhe fossem fornecidos valores sobre o volume de dados mínimo que cada ligação deveria suportar, o problema teria necessariamente a mesma solução? Justifique.

3.6

No mapa da figura abaixo estão representadas cinco localizações geográficas, referentes aos clientes de uma dada empresa que deverão ser visitados num dado dia. As distâncias em km entre todos eles estão apresentadas no quadro abaixo.

Sabendo que o armazém da empresa está muito próximo do cliente 3, este será o primeiro a ser visitado, sendo a distância entre estes dois negligenciável.

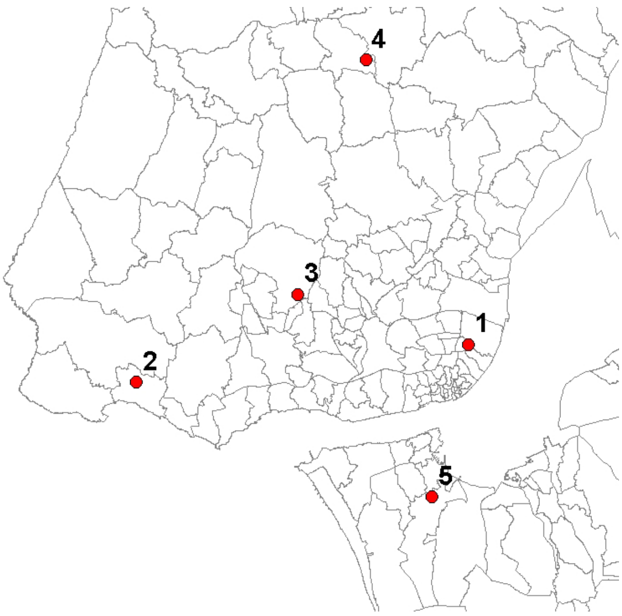
Pretende-se minimizar a distância total a percorrer, garantindo que todos os clientes são visitados.

3.6.1 Identifique o tipo de problema em questão, e indique que algoritmos podem ser usados para resolver o problema. Comente.

3.6.2 Quantas soluções é que o problema tem?

3.6.3 Consegue em tempo útil resolver o problema? Em caso afirmativo apresente a solução óptima.

3.6.4 Caso o cliente 3 não tivesse obrigatoriamente de ser o primeiro a ser visitado, o problema ficaria muito mais difícil de ser resolvido?



	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	---	24	14	22	10
2		---	13	28	22
3			---	18	17
4				---	35
5					---

Distâncias em km entre clientes

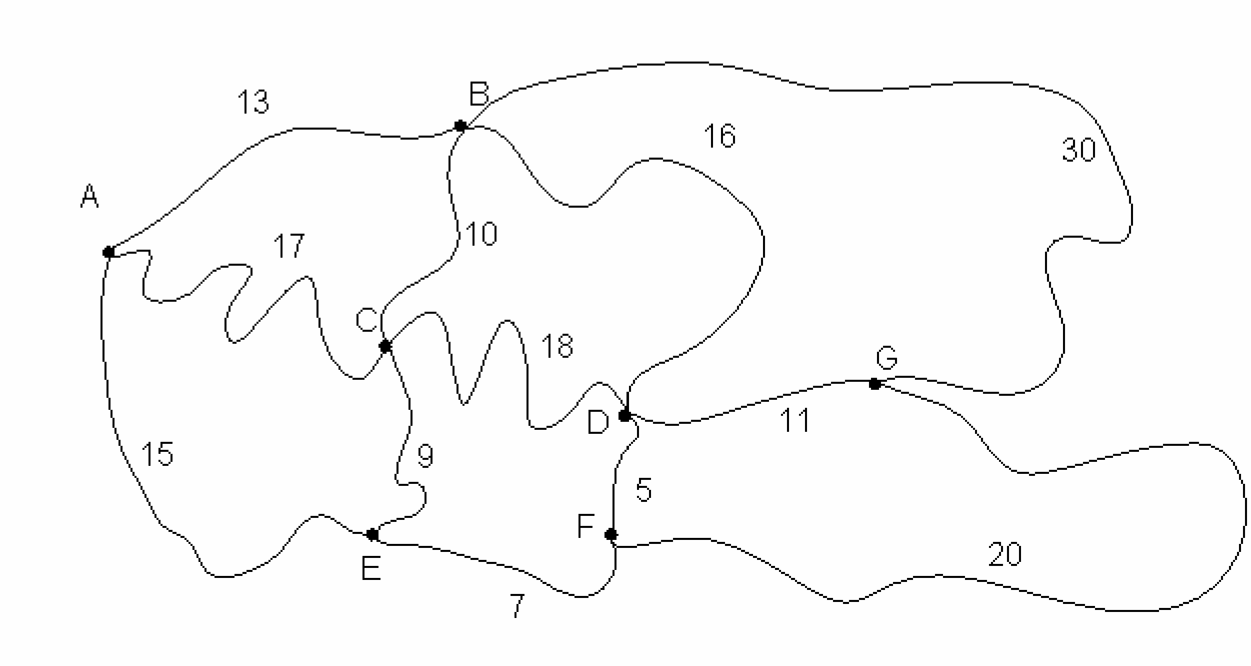
3.7

Imagine que se encontra no meio do Alentejo, são 2h da manhã e o seu carro entrou na reserva. Do livro de instruções do seu carro, sabe que a reserva dá aproximadamente para 40km. Numa análise sumária do mapa que tem consigo, consegue identificar a sua posição (ponto A) e a posição da bomba mais perto de si que ainda está aberta (ponto G).

De acordo com a figura abaixo, vários caminhos são passíveis de serem tomados, mas deverá ser escolhido um caminho para o qual tenha gasolina suficiente.

3.7.1 Que algoritmos podem ser utilizados para resolver o problema?

3.7.2 Apresente a solução óptima do problema.



Exercícios baseados e adaptados de:

Hill, M. M., & Santos, M. M. d. (2002). *Investigação operacional - exercícios de programação linear* (2 ed.). Lisboa: Sílabo.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2005). *Introduction to operations research* (8 ed.). Singapore: McGraw-Hill International Edition.

Magalhães, L. T. (1992). *Álgebra linear como introdução à matemática aplicada* (4 ed.). Lisboa: Texto Editora.

Ramalhete, M., Guerreiro, J., & Magalhães, A. (1985). *Programação linear* (Vol. I): McGraw Hill de Portugal, Lda.

Ferreira, M. & Amaral, I. (1995). *Matemática – Programação Matemática*: Edições Sílabo