Método Simplex - Variantes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Variantes sobre o método Simplex: Método do grande M

Revisões

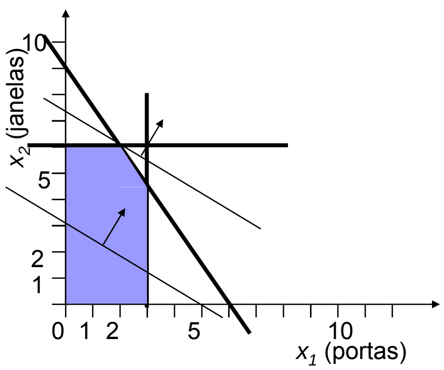
- Simplex básico
- Solução óptima multipla
  - Em simplex: valores 0 na função custo
- Solução degenerada
  - Em simplex: empates na variável a sair, variáveis base nulas
- Solução ilimitada
  - Em simplex: não há variáveis para sair

Variantes do simplex

- Casos em que são necessários
  - Restrições são do tipo "=" ou "≥"
  - Não há solução inicial admissível
- Método do "Grande M"
  - Ideia base:
    - Vamos acrescentar uma **VARIÁVEL ARTIFICIAL** nas equações (similar à "folga"), mas vamos forçar essa variável artificial a anular-se no fim.

Exemplo do Wyndor Glass Co.

- Se impusermos que a oficina 3 tem que ser usada em pleno, a 3ª restrição fica
  - $3x_1+2x_2 = 18$
- Sistema revisto:
  - Função objectivo
    - $Z = 3x_1+5x_2$
  - Restrições
    - $x_1 \leq 4$
    - $2x_2 \leq 12$
    - $3x_1+2x_2 = 18$



Formulação para simplex

Sistema aumentado

$$
\begin{array}{lllll}
Z - 3x_1 - 5x_2 & & & & = 0 \\
\quad x_1 & +s_1 & & & = 4 \\
\quad 2x_2 & & +s_2 & & = 12 \\
3x_1 + 2x_2 & & & +s_3 & = 18
\end{array}
$$

No final TEM que ser 0 !

- Vamos introduzir uma forte penalização para um valor positivo deste factor
  - Como funciona ?

Sistema aumentado

$$
\begin{array}{llllll}
Z - 3x_1 - 5x_2 & & & +Ma_3 & = 0 \\
\quad x_1 & +s_1 & & & = 4 \\
\quad 2x_2 & & +s_2 & & = 12 \\
3x_1 + 2x_2 & & & +a_3 & = 18
\end{array}
$$

M- Um número arbitrariamente grande

Podemos substituir M por um número (neste caso, 10000), ou manipulá-lo algebricamente

1º Passo do método "big M"

- Ao introduzir as penalizações, deixamos de ter a forma canónica da matriz (a "diagonal" de variáveis base)
  - Usar eliminação de Gauss !
  - Passar para forma canónica

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	-3	-5	0	0	M	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	3	2	0	0	1	18

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	-(3M+3)	-(2M+5)	0	0	0	-18M
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	3	2	0	0	1	18

Temos a forma canónica, mas não uma solução viável !

2ºPasso:avançar até solução viável(1)

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	-(3M+3)	-(2M+5)	0	0	0	-18M
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	3	2	0	0	1	18

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	0	-(2M+5)	3M+3	0	0	-6M+12
x_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	0	2	-3	0	1	6

2ºPasso:avançar até solução viável(2)

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	0	-(2M+5)	3M+3	0	0	-6M+12
x_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	1	12
a_3	0	2	-3	0	1	6

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	0	0	-4 1/2	0	M+5/2	27
x_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	3	1	0	6
x_2	0	1	-1 1/2	0	1/2	3

Restrições do tipo "≥"

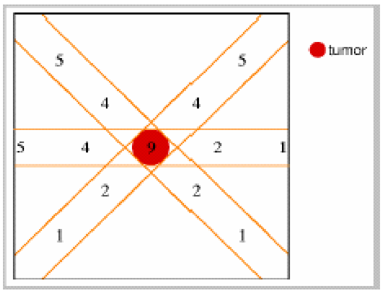
- Em vez de **somar** uma variável de folga, vamos **subtraí-la**
  - $x_1+x_2 \geq k \rightarrow x_1+x_2 - s_3 = k$
  - Introdução de uma variável artificial
  - $x_1+x_2 \geq k \rightarrow x_1+x_2 - s_3 + a_3 = k$

Exemplo com restrições =, ≥, ≤

- Radio-terapia
  - Regular a intensidade dos vários feixes de modo a:
    - Não exceder o nível crítico em zonas saudáveis
    - Ter exactamente o nível crítico na zona limítrofe do tumor
    - Exceder o nível crítico no local do tumor
    - Minimizar a quantidade total de radiação

Pormenores sobre o problema

- Ideia base
  - Ter vários feixes que se interceptam num ponto.
  - Nesse ponto, a dose total é muito maior



- Absorção diferenciada
  - Diferentes tecidos absorvem quantidades diferentes de radiação
  - Diferentes tecidos têm tolerâncias diferentes

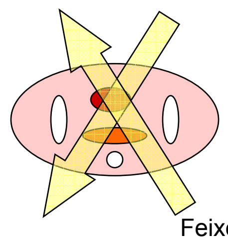
Complicações do problema real

- Há centenas (milhares?) de feixes possíveis
  - Não é problema para o Simplex !
- O feixe é disperso à medida que passa pelo corpo
  - Modelo apresentado não tem isso em conta
- Os danos não dependem linearmente da dosagem
  - É necessário usar um modelo não-linear
- Ver (por exemplo)
  - “Optimizing the Delivery of Radiation Therapy to Cancer patients,” by Shepard, Ferris, Oliveira, and Mackie, SIAM Review, Vol 41, pp 721-744, 1999.

Problema simplificado

- Caso da "Mary" (de Lieberman)
  - Apenas dois feixes são possíveis
  - Tumor perto de zonas muito sensíveis

Tecido	absorção		
	Feixe 1	Feixe 2	Dose max.
Saudável	0.4	0.5	minimo
Sensível	0.3	0.1	≤2.7
Tumor	0.5	0.5	=6
Tumor (ctr.)	0.6	0.4	≥6



Formalização

- Objectivo
  - Ajustar a intensidade dos feixes de modo a optimizar o tratamento
- Variáveis de decisão
  - x_1 – Intensidade do feixe 1
  - x_2 - Intensidade do feixe 1
- Função objectivo:
  - Z – radiação que atinge a zona saudável

min $z = 0.4\, x_1 + 0.5\, x_2$

s.a $\quad 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$ Zona sensível

$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$ Zona tumor

$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$ Centro do Tumor

$x_1, x_2, > 0$

Solução gráfica

Resolução com o grande M

- Transformações
  - Minimizar Z ⇒ Maximizar –Z
  - Acrescentar variaveis artificiais em 2 e 3

Equação	z	x1	x2	s1	a2	s3	a3	radiacao
0	-1	0.4	0.5	0	M	0	M	0
1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6

⇓

Equação	z	x1	x2	s1	a2	s3	a3	radiacao
0 (Z)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
1 (s1)	0	0,3	0,1	1	0	0	0	2,7
2 (a2)	0	0,5	0,5	0	1	0	0	6
3 (a3)	0	0,6	0,4	0	0	-1	1	6

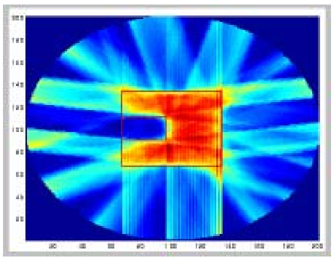
Resolução completa

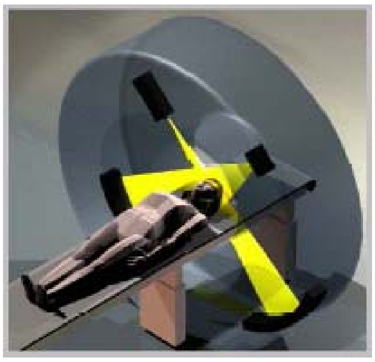
	Equação	z	x1	x2	s1	a2	s3	a3	radiacao
1º	Z	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
	s1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	a2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	a3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
2º	Z	-1	0	-16/30M+11/30	11/3M-4/3	0	M	0	-2.1M-3.6
	x1	0	1	1/3	10/3	0	0	0	9
	a2	0	0	1/3	-5/3	1	0	0	1.5
	a3	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
3º	Z	-1	0	0	-5/3M+7/3	0	-5/3M+11/6	-8/3M-11/6	-0.5M-4.7
	x1	0	1	1	20/3	0	5/3	-5/3	8
	a2	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5
	x2	0	0	0	-10	0	-5	5	3
4º	Z	-1	0	0	0.5	M-1.1	0	M	-5.25
	x1	0	1	1	5	-1	0	0	7.5
	s3	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	x2	0	0	0	-5	3	0	0	4.5

Solução final

- Usar uma dose de 7.5 Kilorads no feixe 1
- Usar uma dose de 4.5 Kilorads no feixe 2

Solução real





Método das duas fases

- Ao usar o método do grande M
  - 1º Eliminar as variáveis artificiais
    - Forçá-las a zero, tirando-as da base
  - 2º Fazer a optimização propriamente dita
- Separar essas duas fazes:
  - 1º Minimizar a soma das variáveis artificias
    - Usar Simplex com $-Z=-Ma_1-Ma_2\ldots.$
  - 2º Usar o Simplex com a função objectivo do problema

No exemplo de radiação

- Funções a minimizar
  - 1º Fase: $Z=a_2+a_3$
  - 2ª Fase: $Z=0.4x_1+0.5x_3$
- Método das duas fases não usa "M", e por isso é mais usado nas implementações computacionais

Variáveis negativas

- Se estiverem limitadas inferiormente
  - $x_1 \geq -L \quad \Rightarrow x_2 = x_1 + L,\ x_2 \geq 0$
  - Reescrever as equações usando x_2 em vez da variável original
- Se puderem assumir qualquer valor
  - $x_1 = x_2 - x_3$, com $x_2, x_3 \geq 0$
  - Reescrever as equações usando x_2 e x_3 em vez da variável original

Exemplo de variáveis negativas

- Wyndor Glass Co.
  - Suponhamos que x_1 é o ***aumento*** na produção de portas (por hipótese já estão a ser produzidas 10 portas)
  - Em vez de $x_1 \geq 0$, teremos $x_1 \geq -10$
    - Seja $x_1 = x' - 10,\ x' \geq 0$

Max $Z = 3\,(x'-10) + 5\,x2$

$$\begin{aligned} (x'-10) &\leq 4 \\ 2\,x_2 &\leq 12 \\ 3\,(x'-10) + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

e

$$(x'-10) \geq -10,\ x2 \geq 0.$$

⇒

Max $Z = 3x' + 5\,x_2 - 30$

$$\begin{aligned} x' \quad + s_1 \quad &= 14 \\ 2x' \quad + s_2 &= 12 \\ 3x' + 2x_2 \quad + s_3 &= 48 \end{aligned}$$

e

$$x' \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Análise pós-optimal

- Questão:
  - Será que alterando um pouco as condições, as soluções irão ser muito diferentes ?
- Porque é importante
  - Muitos parâmetros são ***estimados***, e podem não ser o que pensamos
  - As condições podem ***variar*** no tempo
  - A própria aproximação linear é isso mesmo: uma ***aproximação***

Como fazer essa análise ?

- 1 - Refazer o problema, com parâmetros ligeiramente diferentes
  - Dar ao decisor várias hipóteses.
  - Pode ser rápido resolver várias vezes o problema
- 2 - A partir da solução já obtida, ver como **pequenas** alterações afectam a solução
  - É mais rápido que recalcular tudo
  - Pode não ser necessário fazer contas

Variações nas restrições

- Quais são as restrições que mais afectam a solução ?
- Quais são as “restrições” que não o são de facto ?
- Será que vale a pena fazer um esforço extra para “esticar” uma das restrições ?

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \dots \leq B_1$$

variar B

Analisando a tabela final do Simplex…

- Variáveis de folga na base
  - O recurso em questão não está a limitar a solução. A folga está directamente acessível

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Z	0	0	0	3/2	1	36	Lucro
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2	Folga (em h) da oficina de alumínios
x_2	0	1	0	1/2	0	6	Lotes de janelas
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2	Lotes de portas

Analisando a tabela final do Simplex…

- Coeficientes as variáveis de folga indicam quanto é que o recurso tem que crescer para o lucro aumentar 1

Basta um pequeno aumento no recurso 2 para aumentar o lucro
Chama-se também
PREÇO SOMBRA

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Z	0	0	0	3/2	1	36	Lucro
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2	Folga (em h) da oficina de alumínios
x_2	0	1	0	1/2	0	6	Lotes de janelas
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2	Lotes de portas

- Coeficientes finais das variáveis de folga
  - Também chamados *preços sombra*
  - Permitem calcular dZ/ds_i (sensibilidade do lucro ao recurso *i*)
    - Valores altos = Para aumentar Z não é necessário aumentar muito os recursos a disponibilizar
- Variações nos C_i, e A_{ij}
  - Enquanto as relações de ordem se mantiverem…é directo
- Limitações da análise pós-optimal
  - Só válida para pequenas variações
  - Variações maiores implicam uma mudança na escolha das variáveis base, logo uma solução completamente diferente