

Método Simplex - Variantes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Variantes sobre o método Simplex: Método do grande M

Revisões

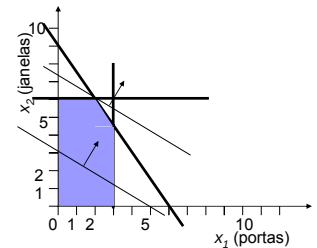
- Simplex básico
- Solução ótima múltipla
 - Em simplex: valores 0 na função custo
- Solução degenerada
 - Em simplex: empates na variável a sair, variáveis base nulas
- Solução ilimitada
 - Em simplex: não há variáveis para sair

Variantes do simplex

- Casos em que são necessários
 - Restrições são do tipo “=” ou “≥”
 - Não há solução inicial admissível
- Método do “Grande M”
 - Ideia base:
 - Vamos acrescentar uma **VARIÁVEL ARTIFICIAL** nas equações (similar à “folga”), mas vamos forçar essa variável artificial a anular-se no fim.

Exemplo do Wyndor Glass Co.

- Se impusermos que a oficina 3 tem que ser usada em pleno, a 3ª restrição fica
 - $3x_1 + 2x_2 = 18$
- Sistema revisto:
 - Função objectivo
 - $Z = 3x_1 + 5x_2$
 - Restrições
 - $x_1 \leq 4$
 - $2x_2 \leq 12$
 - $3x_1 + 2x_2 = 18$



Formulação para simplex

Sistema aumentado

$$\begin{array}{rcl} Z - 3x_1 - 5x_2 & & = 0 \\ x_1 & + s_1 & = 4 \\ & 2x_2 & + s_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & + s_3 & = 18 \end{array}$$

No final TEM que ser 0 !

- Vamos introduzir uma forte penalização para um valor positivo deste factor

□ Como funciona ?

Sistema aumentado

$$\begin{array}{rcl} Z - 3x_1 - 5x_2 & + Ma_3 & = 0 \\ x_1 & + s_1 & = 4 \\ & 2x_2 & + s_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & + a_3 & = 18 \end{array}$$

M- Um número arbitrariamente grande

Podemos substituir M por um número (neste caso, 10000), ou manipulá-lo algebricamente

1º Passo do método “big M”

- Ao introduzir as penalizações, deixamos de ter a forma canónica da matriz (a “diagonal” de variáveis base)
 - Usar eliminação de Gauss !
 - Passar para forma canónica

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	-3	-5	0	0	M	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	3	2	0	0	1	18

Temos a forma canónica, mas não uma solução viável !

Método Simplex - Variantes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEG, 2008

2º Passo: avançar até solução viável⁽¹⁾

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	$-(3M+3)$	$-(2M+5)$	0	0	0	-18M
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	3	2	0	0	1	18



V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	0	$-(2M+5)$	$3M+3$	0	0	$-6M+12$
x_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
a_3	0	2	-3	0	1	6

2º Passo: avançar até solução viável⁽²⁾

V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	0	$-(2M+5)$	$3M+3$	0	0	$-6M+12$
x_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	1	12
a_3	0	2	-3	0	1	6



V	x_1	x_2	s_1	s_2	a_3	
Z	0	0	$-4\frac{1}{2}$	0	$M+\frac{5}{2}$	27
x_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	3	1	0	6
x_2	0	1	$-1\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

Restrições do tipo “≥”

- Em vez de **somar** uma variável de folga, vamos **subtraí-la**

$$\square x_1 + x_2 \geq k \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 - s_3 = k$$

- Introdução de uma variável artificial

$$\square x_1 + x_2 \geq k \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 - s_3 + a_3 = k$$

Exemplo com restrições =, ≥, ≤

Radio-terapia

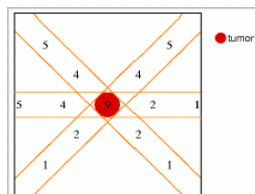
- Regular a intensidade dos vários feixes de modo a:
 - Não exceder o nível crítico em zonas saudáveis
 - Ter exactamente o nível crítico na zona limítrofe do tumor
 - Exceder o nível crítico no local do tumor
 - Minimizar a quantidade total de radiação



Pormenores sobre o problema

Ideia base

- Ter vários feixes que se interceptam num ponto.
- Nesse ponto, a dose total é muito maior



Absorção diferenciada

- Diferentes tecidos absorvem quantidades diferentes de radiação
- Diferentes tecidos têm tolerâncias diferentes

Complicações do problema real

- Há centenas (milhares?) de feixes possíveis
 - Não é problema para o Simplex !
- O feixe é disperso à medida que passa pelo corpo
 - Modelo apresentado não tem isso em conta
- Os danos não dependem linearmente da dosagem
 - É necessário usar um modelo não-linear
- Ver (por exemplo)
 - “Optimizing the Delivery of Radiation Therapy to Cancer patients,” by Shepard, Ferris, Oliveira, and Mackie, SIAM Review, Vol 41, pp 721-744, 1999.

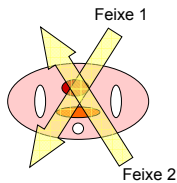
Método Simplex - Variantes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Problema simplificado

- Caso da “Mary” (de Lieberman)
 - Apenas dois feixes são possíveis
 - Tumor perto de zonas muito sensíveis

Tecido	absorção		
	Feixe 1	Feixe 2	Dose max.
Saudável	0.4	0.5	mínimo
Sensível	0.3	0.1	≤ 2.7
Tumor	0.5	0.5	$= 6$
Tumor (ctr.)	0.6	0.4	≥ 6



Formalização

- Objectivo
 - Ajustar a intensidade dos feixes de modo a otimizar o tratamento
- Variáveis de decisão
 - x_1 – Intensidade do feixe 1
 - x_2 – Intensidade do feixe 1
- Função objectivo:
 - Z – radiação que atinge a zona saudável

$$\min z = 0.4 x_1 + 0.5 x_2$$

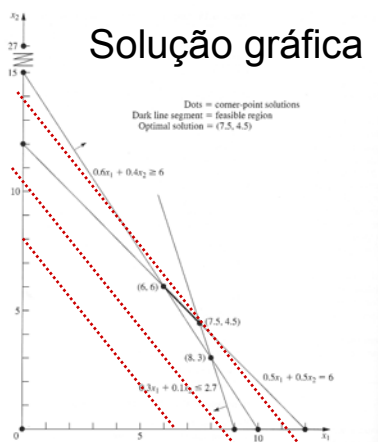
$$\text{s.a. } 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \quad \text{Zona sensível}$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \quad \text{Zona tumor}$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \quad \text{Centro do Tumor}$$

$$x_1, x_2, > 0$$

Solução gráfica



Resolução com o grande M

- Transformações
 - Minimizar $Z \Rightarrow$ Maximizar $-Z$
 - Acrescentar variáveis artificiais em 2 e 3

Equação	z	x1	x2	s1	a2	s3	a3	radiacao
0	-1	0.4	0.5	0	M	0	M	0
1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6



Equação	z	x1	x2	s1	a2	s3	a3	radiacao
0 (Z)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
1 (s1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
2 (a2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
3 (a3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6

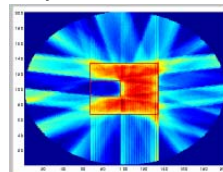
Resolução completa

Equação	z	x1	x2	s1	a2	s3	a3	radiacao	
1 ^a Z	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M	
s1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7	
a2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6	
a3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6	
2 ^a Z	-1	0	-16/30M+11/30	11/3M-4/3	0	M	0	-2.1M-3.6	
x1	0	1	1/3	10/3	0	0	0	9	
a2	0	0	1/3	-5/3	1	0	0	1.5	
a3	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6	
3 ^a Z	-1	0	0	-5/3M+7/3	0	-5/3M+11/6	-8/3M-11/6	-0.5M-4.7	
x1	0	1	1	20/3	0	5/3	-5/3	8	
a2	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5	
x2	0	0	0	-10	0	-5	5	3	
4 ^a Z	-1	0	0	0	0.5	M-1.1	0	M	-5.25
x1	0	1	1	5	-1	0	0	7.5	
s3	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3	
x2	0	0	0	0	-5	3	0	4.5	

Solução final

- Usar uma dose de 7.5 Kilorads no feixe 1
- Usar uma dose de 4.5 Kilorads no feixe 2

Solução real



Método Simplex - Variantes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEG, 2008

Método das duas fases

- Ao usar o método do grande M
 - 1º Eliminar as variáveis artificiais
 - Forçá-las a zero, tirando-as da base
 - 2º Fazer a optimização propriamente dita
- Separar essas duas fases:
 - 1º Minimizar a soma das variáveis artificiais
 - Usar Simplex com $-Z = -Ma_1 - Ma_2 \dots$
 - 2º Usar o Simplex com a função objectivo do problema

No exemplo de radiação

- Funções a minimizar
 - 1º Fase: $Z = a_2 + a_3$
 - 2ª Fase: $Z = 0.4x_1 + 0.5x_3$
- Método das duas fases não usa “M”, e por isso é mais usado nas implementações computacionais

Variáveis negativas

- Se estiverem limitadas inferiormente
 - $x_1 \geq -L \Rightarrow x_2 = x_1 + L, x_2 \geq 0$
 - Reescrever as equações usando x_2 em vez da variável original
- Se puderem assumir qualquer valor
 - $x_1 = x_2 - x_3$, com $x_2, x_3 \geq 0$
 - Reescrever as equações usando x_2 e x_3 em vez da variável original

Exemplo de variáveis negativas

- Wyndor Glass Co.
 - Suponhamos que x_1 é o **aumento** na produção de portas (por hipótese já estão a ser produzidas 10 portas)
 - Em vez de $x_1 \geq 0$, teremos $x_1 \geq -10$
 - Seja $x_1 = x' - 10, x' \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } Z & = & 3(x' - 10) + 5x_2 \\ (x' - 10) & & \leq 4 \\ 2x_2 & & \leq 12 \\ 3(x' - 10) + 2x_2 & & \leq 18 \\ e & & (x' - 10) \geq -10, x_2 \geq 0. \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} \text{Max } Z & = & 3x' + 5x_2 - 30 \\ x' & + & s_1 = 14 \\ 2x' & & + s_2 = 12 \\ 3x' + 2x_2 & & + s_3 = 48 \\ e & & x' \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Análise pós-optimal

- Questão:
 - Será que alterando um pouco as condições, as soluções irão ser muito diferentes ?
- Porque é importante
 - Muitos parâmetros são **estimados**, e podem não ser o que pensamos
 - As condições podem **variar** no tempo
 - A própria aproximação linear é isso mesmo: uma **aproximação**

Como fazer essa análise ?

- 1 - Refazer o problema, com parâmetros ligeiramente diferentes
 - Dar ao decisor várias hipóteses.
 - Pode ser rápido resolver várias vezes o problema
- 2 - A partir da solução já obtida, ver como **pequenas** alterações afectam a solução
 - É mais rápido que recalcular tudo
 - Pode não ser necessário fazer contas

Método Simplex - Variantes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEG, 2008

Variações nas restrições

- Quais são as restrições que mais afectam a solução ?
- Quais são as “restrições” que não o são de facto ?
- Será que vale a pena fazer um esforço extra para “esticar” uma das restrições ?

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \dots \leq B_1 \xrightarrow{\text{variar } B}$$

Analisando a tabela final do Simplex...

- Variáveis de folga na base
 - O recurso em questão não está a limitar a solução. A folga está directamente acessível

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Lucro
 Folga (em h) da oficina de alumínio
 Lotes de janelas
 Lotes de portas

Analisando a tabela final do Simplex...

- Coeficientes as variáveis de folga indicam quanto é que o recurso tem que crescer para o lucro aumentar 1

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Lucro
 Folga (em h) da oficina de alumínio
 Lotes de janelas
 Lotes de portas

Basta um pequeno aumento no recurso 2 para aumentar o lucro
 Chama-se também
 PREÇO SOMBRA

- Coeficientes finais das variáveis de folga
 - Também chamados *preços sombra*
 - Permitem calcular dZ/ds_i (sensibilidade do lucro ao recurso i)
 - Valores altos = Para aumentar Z não é necessário aumentar muito os recursos a disponibilizar
- Variações nos C_i , e A_{ij}
 - Enquanto as relações de ordem se mantiverem...é directo
- Limitações da análise pós-optimal
 - Só válida para pequenas variações
 - Variações maiores implicam uma mudança na escolha das variáveis base, logo uma solução completamente diferente