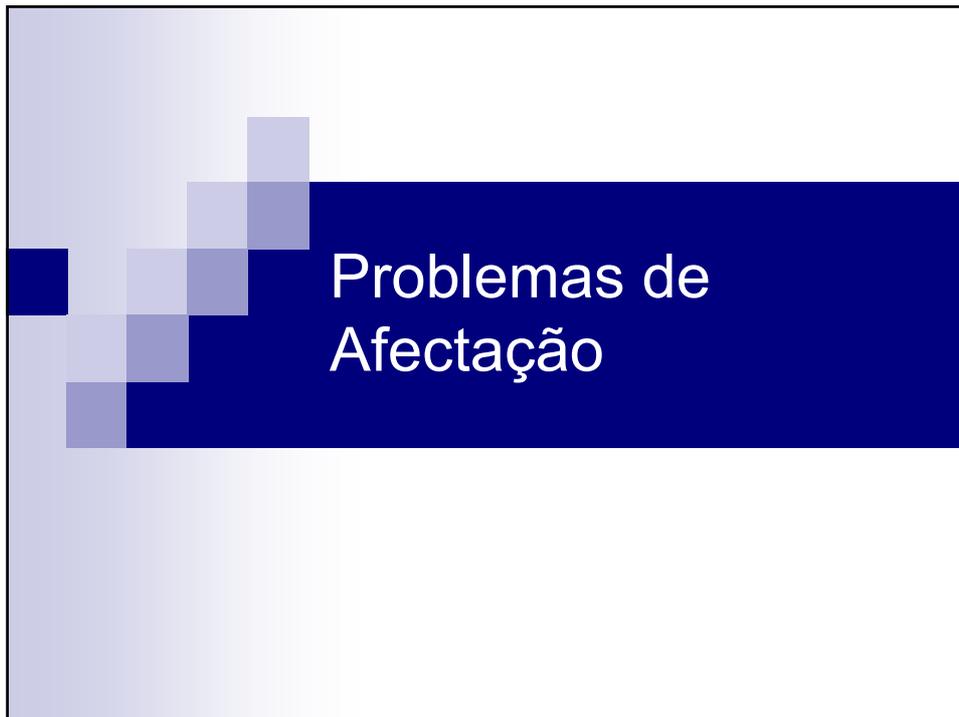


Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008



Problema de afectação

- Caso particular de programação linear
- Caso particular do problema de transportes
- Permite uma solução particular mais simples que os dois casos anteriores

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Aplicações de problemas de afectação

- Atribuição de pessoas ou máquinas a tarefas
- Exemplos:
 - Numa escritório de advogados, atribuir casos aos diversos advogados, consoante a experiência e gosto de cada um deles
 - Numa empresa de transportes, atribuir as diversas viaturas aos serviços necessários
 - Numa obra grande atribuir tarefas aos sub-empregados

Exemplo

- Afectação de empregados a obras
 - Para ser mais rápido, cada obra deve ser feita por um empregado diferente...

	Bloco A	Bloco B	Acessos	Garagens	Cantina
J.Martins	643.000	590.500	150.000	180.000	320.000
Sousa P.	543.000	540.000	240.000	175.000	325.000
S.C.A.	854.000	790.000	170.000	190.000	410.000
A.C.Pinto	580.500	580.000	100.000	185.000	395.500
R. e Filhos	723.000	710.00	240.500	190.000	330.000

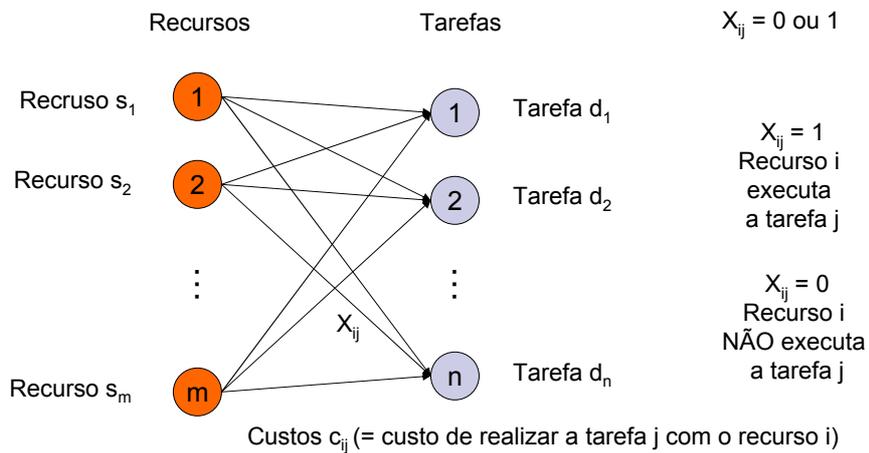
Que obra recebe cada empregado ?

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Formulação geral (em rede)

■ Min custo



Formulação como PL

■ Minimizar custo

□ $\text{Min } c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{nn}x_{nn}$

■ Sujeito a

□ $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = 1$

n Restrições devido aos recursos

□ $x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} = 1$

□ $x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = 1$

n Restrições devido às tarefas

□ $x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn} = 1$

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Formulação como PL

- Simplificando: Minimizar $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{recursos})$$
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{tarefas})$$
- Não é necessário impor $x=0$ ou 1
 - Nesta caso, há um teorema que prova que se os coeficientes são inteiros, então as variáveis também são inteiras. Como as restrições não permitem valores superiores a 1, x_{ij} tem que ser 0 ou 1

Exemplo: Trabalho de NTI

- O Miguel, a Ana, e o Ricardo têm que fazer o trabalho prático da cadeira de Novas Tecnologias de Informação (NTI), do 4ºano do ISEGI. O trabalho consiste em resolver o problema do caixeiro viajante para 8 cidades portuguesas, usando uma rede neuronal SOM. Nesse trabalho é preciso:
 - Fazer uma pesquisa bibliográfica (PB) para ver como é que outras pessoas resolveram este problema, e para descobrir as distâncias entre as cidades pretendidas
 - Programar (PR) uma rede neuronal SOM, usando o software SAS Enterprise Miner
 - Escrever (ES) o relatório do trabalho

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Exemplo: Trabalho de NTI

- Os três elementos do grupo demoram tempos diferentes a fazer cada uma das tarefas (uns são melhores numa coisa, outros noutra). Os três concordam que o mais importante é que, no conjunto, percam o menos tempo possível, mas todos façam pelo menos uma tarefa.
- Todos escrevem num papel o tempo que estimam demorar a fazer cada tarefa

Exemplo: Trabalho de NTI

- Matriz de custos:

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

- Vamos então usar método húngaro para determinar a solução óptima

Uma solução possível

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

$$\text{Custo} = 6+9+3 = 18$$

Outra solução possível

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

$$\text{Custo} = 6+7+3 = 16$$

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Método húngaro

- Resolve de forma rápida problemas de afectação
- Ideias base
 - Se à matriz de custos somarmos ou subtrairmos constantes, a afectação óptima continua a ser a mesma
 - Dada uma matriz com “0” é óbvio que essa afectação é óptima, pois tem custo 0

Resolução pelo método Húngaro⁽¹⁾

- 1º Subtrair a todas as linhas o menor elemento dessa linha
 - Todas as linhas passam a ter um 0
- 2º Subtrair a todas as colunas o menor elemento dessa coluna
 - Todas as colunas passam a ter um 0
- 3º SE fôr possível escolher “0”s de modo a que todas as linhas e colunas estejam cobertas.. temos uma solução óptima
 - O que é “cobrir” ? Quanto escolhermos um zero estamos a atribuir um recurso a uma tarefa, logo essa tarefa fica “coberta” (há “alguém” que a faz), e o recurso também fica “coberto”

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Trabalho de NTI, método húngaro

■ Matriz de custos:

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3



	PB	PR	ES
Miguel	2	3	0
Ana	4	6	0
Ricardo	3	3	0



	PB	PR	ES
Miguel	0	0	0
Ana	2	3	0
Ricardo	1	0	0

O Miguel faz a pesquisa
O Ricardo programa
A Ana escreve o relatório

$$3(A)+6(R)+6(M)=15 \text{ horas}$$

Exemplo: Trabalho de NTI revisto

■ Matriz de custos (revisto):

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	8	8	3

	PB	PR	ES
Miguel	0	0	0
Ana	2	3	0
Ricardo	3	2	0

- Ao fim do 3º passo, não temos uma solução óptima. Vamos ter que iterar os passos seguintes até o encontrarmos

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Resolução pelo método Húngaro⁽²⁾

- 3º (revisto) Começando com as linhas/colunas com mais zeros, ir “riscando” linhas/colunas até não restarem mais zeros
 - Se o número de linhas/colunas riscadas for igual ao o número de linhas então temos uma solução óptima, e podemos fazer as afectações
 - Se o número de linhas/colunas riscadas for menor que o número de linhas então passar ao passo seguinte
- 4º Entre os números que sobram (não cortados), escolher o número mais pequeno
- 5º Subtrair esse número às quadrículas não cobertas e somá-lo nas intercepções das linhas e colunas cobertas.
- 6º Voltar ao passo 3

Exemplo: Trabalho de NTI revisto

- Continuação a partir do 3º passo

	PB	PR	ES
Miguel	0	0	0
Ana	2	3	0
Ricardo	3	2	0



	PB	PR	ES
Miguel	0	0	2
Ana	0	1	0
Ricardo	1	0	0

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Problemas...

- N° de recursos \neq N° de tarefas
 - Acrescentar recursos ou tarefas “fantasmas”
 - Custos destas atribuições podem ser 0
- Tarefas que necessitam de vários recursos (ou vice versa)
 - Desdobrar em duas tarefas (ou desdobrar recursos)
- Afectações impossíveis
 - Usar custos grandes (M)

Exemplo mais complexo

- A fábrica “Job Shop” comprou 3 máquinas novas. Há 4 locais onde podem ser colocadas, mas deve-se colocá-las de modo a minimizar os custos em transportar os materiais para as máquinas.

	Loc.1	Loc.2	Loc.3	Loc.4
Máq.1	13	16	12	11
Máq.2	15	-	13	20
Máq.3	5	7	10	6

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Outros problemas e algoritmos para PL

Outros algoritmos

- Simplex Dual
- Programação linear paramétrica
- Método do ponto interior
- Método do limite superior
- Programação linear “por objectivos”
-

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Programação (linear) Inteira

- Restrição adicional
 - variáveis de decisão inteiras
- Dificuldade acrescida
 - Podia parecer mais simples que PL pois...
 - Há um número FINITO de soluções
 - A relaxação para PL resolve-se muito depressa
 - No entanto...
 - Há MUITAS soluções
 - Solução relaxada só por (muita) sorte será óptima
- Várias soluções
 - Uma delas, chamada Branch-and-bound (ou A*) será estudada mais tarde