Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Problemas de Afectação

Problema de afectação

- Caso particular de programação linear
- Caso particular do problema de transportes
- Permite uma solução particular mais simples que os dois casos anteriores

Aplicações de problemas de afectação

- Atribuição de pessoas ou máquinas a tarefas
- Exemplos:
  - Numa escritório de advogados, atribuir casos aos diversos advogados, consoante a experiência e gosto de cada um deles
  - Numa empresa de transportes, atribuir as diversas viaturas aos serviços necessários
  - Numa obra grande atribuir tarefas aos sub-empreiteiros

Exemplo

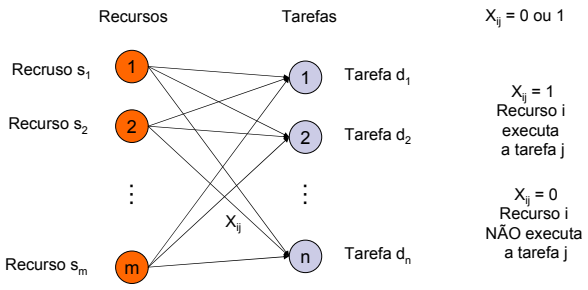
- Afectação de empreiteiros a obras
  - Para ser mais rápido, cada obra deve ser feita por um empreiteiro diferente…

	Bloco A	Bloco B	Acessos	Garagens	Cantina
J.Martins	643.000	590.500	150.000	180.000	320.000
Sousa P.	543.000	540.000	240.000	175.000	325.000
S.C.A.	854.000	790.000	170.000	190.000	410.000
A.C.Pinto	580.500	580.000	100.000	185.000	395.500
R. e Filhos	723.000	710.00	240.500	190.000	330.000

Que obra recebe cada empreiteiro ?

Formulação geral (em rede)

- Min custo



Custos c_{ij} (= custo de realizar a tarefa j com o recurso i)

Formulação como PL

- Minimizar custo
  - Min $c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots c_{nn}x_{nn}$
- Sujeito a
  - $x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=1$
  - $x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn}=1$

  n Restrições devido aos recursos
  - $x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{n1}=1$
  - $x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{nn}=1$

  n Restrições devido às tarefas

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Formulação como PL

- Simplificando:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad \text{(recursos)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad \text{(tarefas)}$$

- Não é necessário impor x=0 ou 1
  - Nesta caso, há um teorema que prova que se os coeficientes são inteiros, então as variáveis também são inteiras. Como as restrições não permitem valores superiores a 1, x_{ij} tem que ser 0 ou 1

Exemplo: Trabalho de NTI

- O Miguel, a Ana, e o Ricardo têm que fazer o trabalho prático da cadeira de Novas Tecnologias de Informação (NTI), do 4ºano do ISEGI. O trabalho consiste em resolver o problema do caixeiro viajante para 8 cidades portuguesas, usando uma rede neuronal SOM. Nesse trabalho é preciso:
  - Fazer uma pesquisa bibliográfica (PB) para ver como é que outras pessoas resolveram este problema, e para descobrir as distâncias entre as cidades pretendidas
  - Programar (PR) uma rede neuronal SOM, usando o software SAS Enterprise Miner
  - Escrever (ES) o relatório do trabalho

Exemplo: Trabalho de NTI

- Os três elementos do grupo demoram tempos diferentes a fazer cada uma das tarefas (uns são melhores numa coisa, outros noutra). Os três concordam que o mais importante é que, no conjunto, percam o menos tempo possível, mas todos façam pelo menos uma tarefa.
- Todos escrevem num papel o tempo que estimam demorar a fazer cada tarefa

Exemplo: Trabalho de NTI

- Matriz de custos:

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

- Vamos então usar método húngaro para determinar a solução óptima

Uma solução possível

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

Custo = 6+9+3 =18

Outra solução possível

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

Custo = 6+7+3 =16

Método húngaro

- Resolve de forma rápida problemas de afectação
- Ideias base
  - Se à matriz de custos somarmos ou subtrairmos constantes, a afectação óptima continua a ser a mesma
  - Dada uma matriz com "0" é óbvio que essa afectação é óptima, pois tem custo 0

Resolução pelo método Húngaro(1)

- 1º Subtrair a todas as linhas o menor elemento dessa linha
  - Todas as linhas passam a ter um 0
- 2º Subtrair a todas as colunas o menor elemento dessa coluna
  - Todas as colunas passam a ter um 0
- 3º SE fôr possível escolher "0"s de modo a que todas as linhas e colunas estejam cobertas.. temos uma solução óptima
  - O que é "cobrir" ? Quanto escolhemos um zero estamos a atribuir um recurso a uma tarefa, logo essa tarefa fica "coberta" (há "alguém" que a faz), e o recurso também fica "coberto"

Problemas de afectação

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Trabalho de NTI, método húngaro

- Matriz de custos:

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	6	6	3

	PB	PR	ES
Miguel	2	3	0
Ana	4	6	0
Ricardo	3	3	0

O Miguel faz a pesquisa
O Ricardo programa
A Ana escreve o relatório

3(A)+6(R)+6(M)=15 horas

	PB	PR	ES
Miguel	0	0	0
Ana	2	3	0
Ricardo	1	0	0

Exemplo: Trabalho de NTI revisto

- Matriz de custos (revisto):

	PB	PR	ES
Miguel	6	7	4
Ana	7	9	3
Ricardo	8	8	3

	PB	PR	ES
Miguel	0	0	0
Ana	2	3	0
Ricardo	3	2	0

- Ao fim do 3ºpasso, não temos uma solução óptima. Vamos ter que iterar os passos seguintes até o encontrarmos

Resolução pelo método Húngaro(2)

- 3º (revisto) Começando com as linhas/colunas com mais zeros, ir "riscando" linhas/colunas até não restarem mais zeros
  - Se o número de linhas/colunas riscadas fôr igual ao o número de linhas então temos uma solução óptima, e podemos fazer as afectações
  - Se o número de linhas/colunas riscadas fôr menor que o número de linhas então passar ao passo seguinte
- 4º Entre os números que sobram (não cortados), escolher o número mais pequeno
- 5º Subtrair esse número às quadrículas não cobertas e somá-lo nas intercepções das linhas e colunas cobertas.
- 6º Voltar ao passo 3

Exemplo: Trabalho de NTI revisto

- Continuação a partir do 3º passo

	PB	PR	ES
Miguel	0	0	0
Ana	2	3	0
Ricardo	3	2	0

	PB	PR	ES
Miguel	0	0	2
Ana	0	1	0
Ricardo	1	0	0

Problemas…

- Nº de recursos ≠ Nº de tarefas
  - Acrescentar recursos ou tarefas "fantasmas"
  - Custos destas atribuições podem ser 0
- Tarefas que necessitam de vários recursos (ou vice versa)
  - Desdobrar em duas tarefas (ou desdobrar recursos)
- Afectações impossíveis
  - Usar custos grandes (M)

Exemplo mais complexo

- A fábrica "Job Shop" comprou 3 máquinas novas. Há 4 locais onde podem ser colacadas, mas deve-se colocá-las de modo a minimizar os custos em transportar os materiais para as máquinas.

	Loc.1	Loc.2	Loc.3	Loc.4
Máq.1	13	16	12	11
Máq.2	15	-	13	20
Máq.3	5	7	10	6

Outros problemas e algoritmos para PL

Outros algoritmos

- Simplex Dual
- Programação linear paramétrica
- Método do ponto interior
- Método do limite superior
- Programação linear "por objectivos"
- …..

Programação (linear) Inteira

- Restrição adicional
  - variáveis de decisão inteiras
- Dificuldade acrescida
  - Podia parecer mais simples que PL pois…
    - Há um número FINITO de soluções
    - A relaxação para PL resolve-se muito depressa
  - No entanto…
    - Há MUITAS soluções
    - Solução relaxada só por (muita) sorte será óptima
- Várias soluções
  - Uma delas, chamada Branch-and-bound (ou A*) será estudada mais tarde