

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Resolução de PL usando o método Simplex

Método Simplex

- Algoritmo para resolver problemas de programação linear
- George Dantzig, 1947
- Muito utilizado
 - Facilmente implementado como programa de computador
 - Consegue resolver problemas com muitas variáveis (milhares)
 - Produz variáveis auxiliares para análise de sensibilidade
 - Convém saber resolver “à mão”, para se compreender o seu funcionamento.

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Mais um problema de PL

■ Wyndor Glass Co.

- ☐ 3 oficinas com alguma capacidade sobrente
 - Oficina nº1 – Trabalhos em Alumínio
 - Oficina nº2 – Carpintaria
 - Oficina nº3 – Montagem final
- ☐ 2 propostas de novos produtos
 - 1 - Portas de vidro com caixilho de alumínio
 - 2 - Janelas grandes com caixilho de madeira
- ☐ Que dados é preciso recolher para tomar uma decisão “óptima” ?

Dados do problema

- Quanta capacidade sobrente existe ?
 - ☐ Oficina 1 (alumínios) 4 horas/semana
 - ☐ Oficina 2 (madeiras) 12 horas/semana
 - ☐ Oficina 3 (montagem) 18 horas/semana
- Quanto tempo demora o fabrico das peças ?
 - ☐ 1 lote de portas – 1h nos alumínios, 3 na montagem
 - ☐ 1 lote de janelas – 2h na carpintaria, 2 na montagem
- Que lucro se consegue com as peças ?
 - ☐ 1 lote de portas – 3.000€
 - ☐ 1 lote de janelas – 5.000€

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Formalização

■ Variáveis de decisão

- x_1 – N° de lotes de portas
- x_2 – N° de lotes de janelas

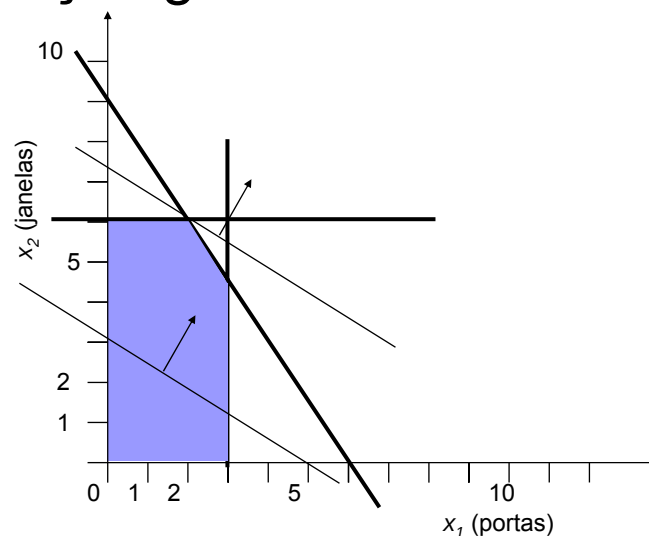
■ Função objectivo:

□ $Z = 3x_1 + 5x_2$

■ Restrições

□ $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
□ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Resolução gráfica



Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Alguns pontos a considerar

- A solução (caso exista) estará sempre na intercepção de duas restrições
 - Basta procurar uma solução nas intercepções
- Para irmos de uma intercepção para outra, basta seguirmos uma das restrições
 - Devemos seguir aquela que provoque maior variação no valor da função objectivo
- Uma solução inicial trivial é considerar que as variáveis de decisão são todas nulas

Método simplex: 1,2,3,4 e 5 !

- 1 – Escrever as equações numa **forma canónica** (tabular)
 - 2 – Começar com uma **solução inicial** viável
 - 3 – **Melhorar** a solução usando uma das restrições
 - 4 – **Testar a optimalidade** da solução
 - 5 – **Repetir** os passos 3 e 4 até não ser possível melhorar mais
- 

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

O sistema na forma canónica ⁽⁰⁾

- Gostaríamos de ter um sistema de equações
 - É mais fácil trabalhar com equações do que com inequações
- Vamos obter um sistema com:
 - n equações (restrições e função objectivo)
 - m incógnitas “verdadeiras” (variáveis de decisão)
- Se $m > n$
 - Há várias soluções possíveis. Podemos fixar $m-n$ variáveis, e só então as n restantes ficam definidas

O sistema na forma canónica (1)

- Transformar inequações em equações
 - Acrescentar uma **variável de folga** nas restrições:
 - $Ax_1 \leq B \Rightarrow Ax_1 + x_2 = B, x_2 \geq 0$
 - Variáveis de folga
 - Formam as **variáveis básicas** iniciais do simplex
 - Têm sempre coeficiente 1
 - Aparecem apenas numa das equações de restrição
 - Ficamos com um **problema aumentado**, onde temos as variáveis de decisão e as variáveis básicas
 - Se assumirmos que as variáveis de decisão são 0, então as variáveis de folga são iguais a B

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

O sistema na forma canónica (2)

Sistema original

$$\text{Max } Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

s.a.

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \leq B_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \leq B_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Soluções: (x_1, x_2, x_3, Z)

Sistema aumentado

$$Z - C_1x_1 - C_2x_2 - C_3x_3 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + 1s_1 + 0s_2 = B_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + 0s_1 + 1s_2 = B_2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

Soluções: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, Z)$

- Soluções do sistema aumentado são também soluções do sistema original
 - Sistema aumentado tem sempre mais variáveis que equações, logo posso forçar os valores de algumas delas, obtendo então os valores das outras
 - O valor das variáveis básicas está directamente acessível

O sistema na forma canónica (3)

Sistema aumentado

$$Z - C_1x_1 - C_2x_2 - C_3x_3 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + 1s_1 + 0s_2 = B_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + 0s_1 + 1s_2 = B_2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

Soluções: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, Z)$

Forma tabelar

V	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	0	0	0
s_1	A_{11}	A_{12}	A_{13}	1	0	B_1
s_2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	0	1	B_2

Coeficientes

Valores das variáveis básicas

Variáveis básicas de cada linha (i.e., variáveis não nulas)

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

No problema da Wyndor Glass

Sistema original

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.

$$x_1 + \quad \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

Sistema aumentado

$$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$x_1 + \quad + s_1 = 4$$

$$2x_2 + s_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

Forma tabelar

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

Variáveis diferentes de 0

Valores dessas variáveis

Solução inicial, e significado da tabela

- A solução inicial é a trivial:
 - As variáveis de decisão são 0
 - As variáveis de folga são iguais à restrição
 - A função objectivo é 0
- As variáveis não básicas da tabela são nulas
- As variáveis básicas têm o valor da última coluna

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Ideia geral para melhorar a solução

- Vamos trocar de variáveis base
- Vamos fazer crescer uma das variáveis não básicas (que assim deixa de ser 0)
 - Vamos escolher a que mais contribui para o lucro
 - Essa variável passa a ser variável base
- Vamos “sacrificar” uma das velhas variáveis básicas.
 - Vamos escolher a variável que menos dimiui com essa entrada
 - Essa variável deixa de ser base e passa a ser 0

Ideia geral para melhorar a solução

- Interpretação:
 - Estamos a eliminar a folga (variável básica) de uma das restrições, aumentando uma variável de decisão
- Passos para melhorar
 - Escolher variável a “entrar” e variável a “sair”
 - Ajustar as equações para que a variável que entra passe a ser variável base
 - Ter coeficiente 1
 - Só aparecer numa equação

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Regras para escolher as novas variáveis base

■ Regra de entrada

- Escolher a variável que na primeira linha tenha o coeficiente negativo que em módulo for maior
 - Escolher x_i : $i = \operatorname{argmin} -C_i$, $-C_i < 0$

■ Regra de saída

- Escolher a variável base i que na sua linha tiver menor razão B_i/A_{ik} , com $A_{ik} > 0$
 - A_{ik} é o coeficiente da variável que vai entrar

No problema da Wyndor Glass

■ Variável que entra:

- x_2

■ Variável que sai:

- s_2

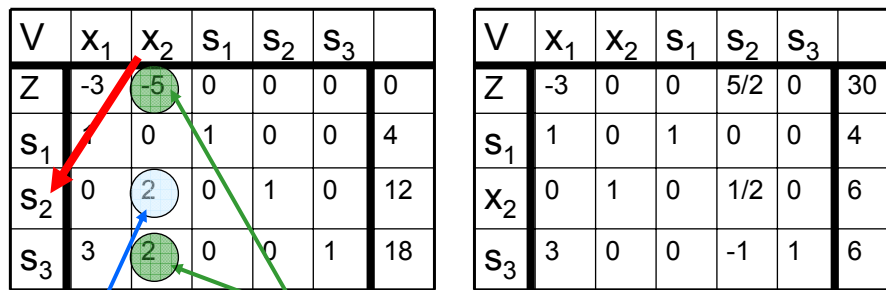
V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Ajuste para a forma canónica, por condensação de Gauss

- Fazer entrar/sair variáveis não é mais ajustar a tabela para obedecer às condições das variáveis base



V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	0	0	5/2	0	30
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6

Tem que passar a ser 1

Tem que passar a ser 0

Teste de optimalidade

- Verificar se ainda há algum coeficiente negativo na função objectivo
- Se sim:
 - Repetir o processo de escolha e ajuste
- Se não
 - Temos a solução óptima, e sabemos o valor das variáveis de decisão e o lucro (todos na última coluna)

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

No problema da Wyndor Glass

(2ª iteração)

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	3	0	0	5/2	0	30
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6

4/1

6/3

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

No problema da Wyndor Glass

■ Solução:

- Consegue-se ter um lucro de 36, fabricando 6 lotes de janelas e 2 lotes de portas

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Lucro

Folga (em h) da oficina de alumínio

Lotes de janelas

Lotes de portas

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

No problema da Wyndor Glass

■ Tabela inicial

- Solução $X_1 = X_2 = 0$

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

■ 1ª Iteração

- Solução $X_1 = 0$ $X_2 = 6$

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	0	0	5/2	0	30
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6

■ 2ª Iteração

- Solução $X_1 = 2$ $X_2 = 6$

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Revendo: 1,2,3,4,5

■ 1 – Escrever a tabela

- Introduzir variáveis de folga, que passam a ser variáveis básicas da tabela

■ 2 – Escolher solução inicial

- Implícita na escrita da tabela
- Todas as variáveis de decisão são nulas, e as de folga são máximas

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Revendo: 1,2,3,4,5

■ 3 – Melhorar

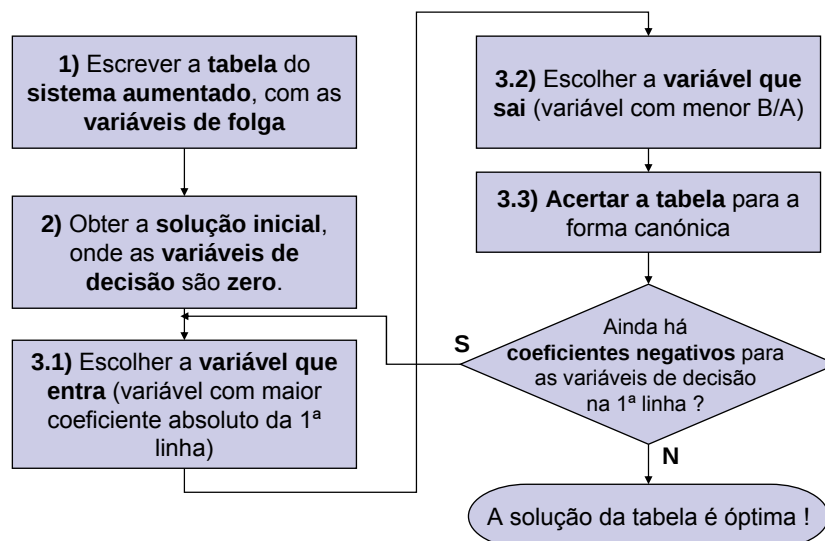
- Escolher variável que entra (maior A)
 - Maior A... em valor absoluto... desde que seja negativo
- Escolher variável que sai (menor B/A), e consequentemente qual a equação da qual a nova variável é base
- Acertar a tabela
 - A nova variável base tem que ter coeficiente 1 na sua linha, e zero nas restantes $\Rightarrow$ condensação de Gauss

■ 4 – Testar optimalidade

- Existem mais A ?

■ 5 – Repetir se necessário

Fluxograma para o Simplex



Ponto da situação

- Temos uma receita para resolver problemas de qualquer tamanho
- Há casos particulares que veremos mais tarde:
 - Empates nas regras de entrada/saída
 - Ausência de variáveis de saída
 - Adaptação para problemas mais gerais (minimizções, problemas mistos, etc)

Resolver o modelo da Pisobom

- Variáveis de decisão:
 - X_1 Quantidade de angorá (100 m)
 - X_2 Quantidade de caxemira (100 m)
- Função objectivo a maximizar:
 - $Z = 40 X_1 + 30 X_2$
- Restrições
 - $3 X_1 + 4 X_2 \leq 12$ (Máquina A)
 - $7 X_1 + 2 X_2 \leq 14$ (Máquina B)

Casos especiais

- Empates na regra de entrada
- Empates na regra de saída
- Inexistência de variáveis para sair