Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Resolução de PL usando o método Simplex

Método Simplex

- Algoritmo para resolver problemas de programação linear
- George Dantzig, 1947
- Muito utilizado
  - Facilmente implementado como programa de computador
  - Consegue resolver problemas com muitas variáveis (milhares)
  - Produz variáveis auxiliares para análise de sensibilidade
  - Convém saber resolver “à mão”, para se compreender o seu funcionamento.

Mais um problema de PL

- Wyndor Glass Co.
  - 3 oficinas com alguma capacidade sobrante
    - Oficina nº1 – Trabalhos em Alumínio
    - Oficina nº2 – Carpintaria
    - Oficina nº3 – Montagem final
  - 2 propostas de novos produtos
    - 1 - Portas de vidro com caixilho de alumínio
    - 2 - Janelas grandes com caixilho de madeira
  - Que dados é preciso recolher para tomar uma decisão “óptima” ?

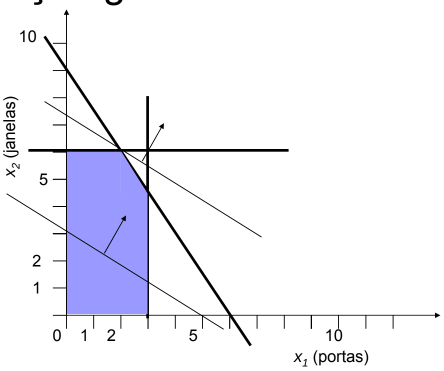
Dados do problema

- Quanta capacidade sobrante existe ?
  - Oficina 1 (alumínios) 4 horas/semana
  - Oficina 2 (madeiras) 12 horas/semana
  - Oficina 3 (montagem) 18 horas/semana
- Quanto tempo demora o fabrico das peças ?
  - 1 lote de portas – 1h nos alumínios, 3 na montagem
  - 1 lote de janelas – 2h na carpintaria, 2 na montagem
- Que lucro se consegue com as peças ?
  - 1 lote de portas – 3.000€
  - 1 lote de janelas – 5.000€

Formalização

- Variáveis de decisão
  - x_1 – Nº de lotes de portas
  - x_2 - Nº de lotes de janelas
- Função objectivo:
  - $Z = 3x_1 + 5x_2$
- Restrições
  - $x_1 \leq 4$ $\quad 2x_2 \leq 12$ $\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$
  - $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Resolução gráfica



Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Alguns pontos a considerar

- A solução (caso exista) estará sempre na intercepção de duas restrições
  - Basta procurar uma solução nas intercepções
- Para irmos de uma intercepção para outra, basta seguirmos uma das restrições
  - Devemos seguir aquela que provoque maior variação no valor da função objectivo
- Uma solução inicial trivial é considerar que as variáveis de decisão são todas nulas

Método simplex: 1,2,3,4 e 5 !

- 1 – Escrever as equações numa **forma canónica** (tabular)
- 2 – Começar com uma **solução inicial** viável
- 3 – **Melhorar** a solução usando uma das restrições
- 4 – **Testar a optimalidade** da solução
- 5 – **Repetir** os passos 3 e 4 até não ser possível melhorar mais

O sistema na forma canónica (0)

- Gostaríamos de ter um sistema de equações
  - É mais fácil trabalhar com equações do que com inequações
- Vamos obter um sistema com:
  - *n* equações (restrições e função objectivo)
  - *m* incógnitas "verdadeiras" (variáveis de decisão)
- Se $m>n$
  - Há várias soluções possíveis. Podemos fixar $m-n$ variáveis, e só então as n restantes ficam definidas

O sistema na forma canónica (1)

- Transformar inequações em equações
  - Acrescentar uma **variável de folga** nas restrições:
    - $Ax_1 \le B \quad \Rightarrow \quad Ax_1 + x_2 = B, \; x_2 \ge 0$
  - Variáveis de folga
    - Formam as **variáveis básicas** iniciais do simplex
    - Têm sempre coeficiente 1
    - Aparecem apenas numa das equações de restrição
    - Ficamos com um **problema aumentado**, onde temos as variáveis de decisão e as variáveis básicas
    - Se assumirmos que as variáveis de decisão são 0, então as variáveis de folga são iguais a B

O sistema na forma canónica (2)

Sistema original

$$\text{Max } Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

s.a.

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \le B_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \le B_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Soluções: (x_1, x_2, x_3, Z)

Sistema aumentado

$$Z - C_1x_1 - C_2x_2 - C_3x_3 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$
$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + 1s_1 + 0s_2 = B_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + 0s_1 + 1s_2 = B_2$$
$$x_1, x_2, x_3\ s_1, s_2 \ge 0$$

Soluções: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, Z)$

- Soluções do sistema aumentado são também soluções do sistema original
  - Sistema aumentado tem sempre mais variáveis que equações, logo posso forçar os valores de algumas delas, obtendo então os valores das outras
  - O valor das variáveis básicas está directamente acessível

O sistema na forma canónica (3)

Sistema aumentado

$$Z - C_1x_1 - C_2x_2 - C_3x_3 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$
$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + 1s_1 + 0s_2 = B_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + 0s_1 + 1s_2 = B_2$$
$$x_1, x_2, x_3\ s_1, s_2 \ge 0$$

Soluções: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s2, Z)$

Forma tabelar

V	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	0	0	0
s_1	A_{11}	A_{12}	A_{13}	1	0	B_1
s_2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	0	1	B_2

Coeficientes

Valores das variáveis básicas

Variáveis básicas de cada linha (i.e., variáveis não nulas)

No problema da Wyndor Glass

Sistema original

Max $Z = 3x_1 + 5x_2$
s.a.
$x_1 + \quad \leq 4$
$2x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

Sistema aumentado

$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$
$x_1 + s_1 = 4$
$2x_2 + s_2 = 12$
$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$

Forma tabelar

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

Variáveis diferentes de 0

Valores dessas variáveis

Solução inicial, e significado da tabela

- A solução inicial é a trivial:
  - As variáveis de decisão são 0
  - As variáveis de folga são iguais à restrição
  - A função objectivo é 0
- As variáveis não básicas da tabela são nulas
- As variáveis básicas têm o valor da última coluna

Ideia geral para melhorar a solução

- Vamos trocar de variáveis base
- Vamos fazer crescer uma das variáveis não básicas (que assim deixa de ser 0)
  - Vamos escolher a que mais contribui para o lucro
  - Essa variável passa a ser variável base
- Vamos "sacrificar" uma das velhas variáveis básicas.
  - Vamos escolher a variável que menos dimiui com essa entrada
  - Essa variável deixa de ser base e passa a ser 0

Ideia geral para melhorar a solução

- Interpretação:
  - Estamos a eliminar a folga (variável básica) de uma das restrições, aumentando uma variável de decisão
- Passos para melhorar
  - Escolher variável a "entrar" e variável a "sair"
  - Ajustar as equações para que a variável que entra passe a ser variável base
    - Ter coeficiente 1
    - Só aparecer numa equação

Regras para escolher as novas variáveis base

- Regra de entrada
  - Escolher a variável que na primeira linha tenha o coeficiente negativo que em módulo for maior
    - Escolher x_i : $i = \text{argmin} -C_i$, $-C_i < 0$
- Regra de saída
  - Escolher a variável base ***i*** que na sua linha tiver menor razão B_i/A_{ik}, com $A_{ik} > 0$
    - A_{ik} é o coeficiente da variável que vai entrar

No problema da Wyndor Glass

- Variável que entra:
  - X_2
- Variável que sai:
  - S_2

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Ajuste para a forma canónica, por condensação de Gauss

- Fazer entrar/sair variáveis não é mais ajustar a tabela para obedecer às condições das variáveis base

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	0	0	5/2	0	30
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6

Tem que passar a ser 1

Tem que passar a ser 0

Teste de optimalidade

- Verificar se ainda há algum coeficiente negativo na função objectivo
- Se sim:
  - Repetir o processo de escolha e ajuste
- Se não
  - Temos a solução óptima, e sabemos o valor das variáveis de decisão e o lucro (todos na última coluna)

No problema da Wyndor Glass

(2ª iteração)

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Z	-3	0	0	5/2	0	30	
s_1	1	0	1	0	0	4	4/1
x_2	0	1	0	1/2	0	6	
s_3	3	0	0	-1	1	6	6/3

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

No problema da Wyndor Glass

- Solução:
  - Consegue-se ter um lucro de 36, fabricando 6 lotes de janelas e 2 lotes de portas

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Z	0	0	0	3/2	1	36	Lucro
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2	Folga (em h) da oficina de alumínios
x_2	0	1	0	1/2	0	6	Lotes de janelas
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2	Lotes de portas

No problema da Wyndor Glass

- Tabela inicial
  - Solução $X_1=X_2=0$

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

- 1ª Iteração
  - Solução $X_1=0$ $X_2=6$

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	-3	0	0	5/2	0	30
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6

- 2ª Iteracão
  - Solução $X_1=2$ $X_2=6$

V	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	0	0	3/2	1	36
s_1	0	0	1	1/3	1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Revendo: 1,2,3,4,5

- 1 – Escrever a tabela
  - Introduzir variáveis de folga, que passam a ser variáveis básicas da tabela
- 2 – Escolher solução inicial
  - Implícita na escrita da tabela
  - Todas as variáveis de decisão são nulas, e as de folga são máximas

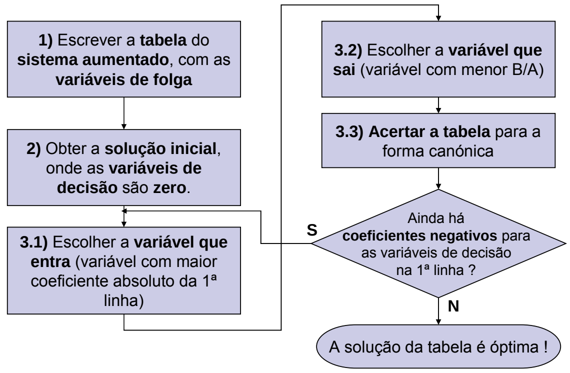
Método Simplex

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Revendo: 1,2,3,4,5

- 3 – Melhorar
  - Escolher variável que entra (maior A)
    - Maior A… em valor absoluto… desde que seja negativo
  - Escolher variável que sai (menor B/A), e consequentemente qual a equação da qual a nova variável é base
  - Acertar a tabela
    - A nova variável base tem que ter coeficiente 1 na sua linha, e zero nas restantes ⇒ condensação de Gauss
- 4 – Testar optimalidade
  - Existem mais A ?
- 5 – Repetir se necessário

Fluxograma para o Simplex



Ponto da situação

- Temos uma receita para resolver problemas de qualquer tamanho
- Há casos particulares que veremos mais tarde:
  - Empates nas regras de entrada/saída
  - Ausência de variáveis de saída
  - Adaptação para problemas mais gerais (minimizações, problemas mistos, etc)

Resolver o modelo da Pisobom

- Variáveis de decisão:
  - X_1 Quantidade de angorá (100 m)
  - X_2 Quantidade de caxemira (100 m)
- Função objectivo a maximizar:
  - $Z = 40 X_1 + 30 X_2$
- Restrições
  - $3 X_1 + 4 X_2 \leq 12$ (Máquina A)
  - $7 X_1 + 2 X_2 \leq 14$ (Máquina B)

Casos especiais

- Empates na regra de entrada
- Empates na regra de saída
- Inexistência de variáveis para sair